Totál alap példák - képletek, tételek - segítség az alapfeladatokhoz

Csak a minimális mintapéldákat tartalmazó feladatsorhoz készült a segéd, korántsem teljes az anyag!
Ez a minimum szükséges, de korántsem elégséges elmélet, erősen lebutítva a tananyag…

Számelmélet, algebra

Oszthatósági szabályok: egy szám akkor osztható …

2-vel, ha a 0; 2; 4; 6; 8 -as számjegyek valamelyikére végződik.
5-tel, ha a 0; 5 -ös számjegyek valamelyikére végződik.
10-el, ha a 0-ra végződik.

3-mal, ha a számjegyeinek összege osztható 3-mal.
9-cel, ha a számjegyeinek összege osztható 9-cel.

4-gyel, ha az utolsó 2 számjegye osztható 4-gyel.
8-cal, ha az utolsó 3 számjegye osztható 8-cal.

Egyéb összetett számokkal, ha az osztót felbontjuk 2 szám szorzatára, melyek egymás relatív prímjei, és ezekkel osztható a szám.

6-al, ha osztható 2-vel és 3-mal is.
10-el, ha osztható 2-vel és 5-tel is.
12-vel, ha osztható 3-mal és 4-gyel is.
15-tel, ha osztható 3-mal és 5-tel is.

Legnagyobb közös osztó (**LNKO**) és legkisebb közös többszörös (**LKKT**) megadása:

LNKO: LegNagyobb Közös Osztó - $(a;b)$
LKKT: LegKisebb Közös Többszörös - $[a;b]$

A vizsgálandó számokat felbontjuk prímtényezőkre.

LNKO számolása: vesszük a *közös* prímtényezőket a legnagyobb *közös* hatványkitevőkön.

pl.: $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ és $560 = 2^4 \cdot 5 \cdot 7$
közös tényezők a 2^3 és az 5^1
$(120; 560) = 2^3 \cdot 5^1 = 40$

LKKT számolása: vesszük az *összes* prímtényezőt a legnagyobb hatványkitevőkön.

pl.: $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ és $560 = 2^4 \cdot 5 \cdot 7$
tényezők a legnagyobb kitevőkön: 2^4, 3^1, 5^1 és 7^1
$[120; 560] = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 1680$

LNKO és LKKT közötti kapcsolat: $(a;b) \cdot [a;b] = a \cdot b$

Római számok felírása: helyiértékenként csoportosítjuk a számjegyeket.

1	I	6	VI	20	XX	70	LXX
2	II	7	VII	30	XXX	80	LXXX
3	III	8	VIII	40	XL	100	C
4	IV	9	IX	50	L	500	D
5	V	10	X	60	LX	1000	M

A számokat helyiértékenként csoportosítva kell képezni, tehát ezresek + százasok + tizesek + egyesek

Pl. 1999 = 1000 + 900 + 90 + 9 = M + CM + XC + IX = MCMXCIX $\neq$ MIM

Mértékváltás:

Hossz:

1 km = 1.000 m
1 m = 10 dm
1 dm = 10 cm
1 cm = 10 mm

Terület:

1 km^2 = 1.000.000 m^2
1 m^2 = 100 dm^2
1 dm^2 = 100 cm^2
1 cm^2 = 100 mm^2
1 km^2 = 100 ha
1 ha = 10.000 m^2

Térfogat:

1 km^3 = 1.000.000.000 m^3
1 m^3 = 1.000 dm^3
1 dm^3 = 1.000 cm^3
1 cm^3 = 1.000 mm^3

1 hl = 100 l
1 l = 10 dl
1 dl = 10 cl
1 cl = 10 ml

1 dm^3 = 1 l

Tömeg:

1 t = 1.000 kg
1 kg = 100 dkg
1 dkg = 10 g
1 t = 10 q
1 q = 100 kg

Szög:

1° = 60' (fokperc)
1' = 60''(fokmásodperc)

Normálalak: egy 1 és 10 között lévő szám, illetve a 10 hatványának szorzata.

Százalékszámítás:

A legegyszerűbb módszer a különböző adatok kiszámításához, ha megkeressük az 1% -ot.

Alap (a): a 100%-os mennyiség

Százalékláb (p): az alap valahány % -a

$(x)\%$-os növelés esetén $p=(100+x)\%$

$(x)\%$-os csökkentés esetén $p=(100-x)\%$

Érték (e): az alap százaléklábbal változtatott része

Az adatokat írjuk fel helyesen, majd alkalmazzuk a képleteket:

$a=\frac{e\cdot 100}{p}$ $\qquad p=\frac{e\cdot 100}{a}$ $\qquad e=\frac{a\cdot p}{100}$

Műveletek törtekkel:

Törtek összeadása és kivonása:

Közös nevező, majd a nevezők változatlanul hagyása mellett a számlálókat összeadjuk / kivonjuk.

Közös nevezőt legegyszerűbben úgy kapunk, ha a nevezőket összeszorozzuk; legszebb alakot pedig úgy, ha a nevezők legkisebb közös többszörösét vesszük.

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$ vagy $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd}$

Törtek szorzása:

Összeszorozzuk a számlálókat, illetve a nevezőket: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Törtek osztása:

Törteket úgy osztunk, hogy az osztó reciprokával szorzunk: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Műveleti sorrend:

A különböző kifejezések alakításakor mindig figyelembe kell venni a műveleti sorrendet:

1) Zárójeleken belüli kifejezések
2) Hatványozás és gyökvonás
3) Szorzás és osztás
4) Összeadás és kivonás

Egyenlő erősségű műveletek esetén *balról jobbra* haladunk!

Egyenletek

Másodfokú egyenlet megoldása:

Rendezés és 0-ra redukálás után az általános alak: $ax^2 + bx + c = 0$

Megoldóképlet: $x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Másodfokú egyenlőtlenség megoldása:

A megoldóképlettel megoldani a példát, majd a kapott gyökök a parabola (másodfokú függvény) gyökei lesznek. Ennek segítségével ábrázolhatjuk és vizsgálhatjuk a parabolát.

Egyenletrendszer megoldása:

Kifejezzük az egyik egyenletből valamelyik ismeretlent, majd a kapott kifejezést beírjuk a másik egyenletbe az ismeretlen helyére.

Hatvány, gyök, log, exp

Hatvány (és exponenciál) definíciók és azonosságok:

$a^{-1}=\frac{1}{a}$ $\quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ $\quad a^m\cdot a^n=a^{n+m}$ $\quad \frac{a^m}{a^n}=a^{n-m}$

$(ab)^n=a^n\cdot b^n$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ $\quad (a^n)^m=a^{nm}$ $\quad a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $\quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $\quad (a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

Gyök definíciók:

$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ $\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\quad \sqrt[n]{a^k}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^k$ $\quad a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$

Log összefüggések és azonosságok:

$\log_a b=c \quad\Leftrightarrow\quad a^c=b$

$\log_a a^x=x$ $\quad a^{\log_a x}=x$ $\quad x^{\log_a y}=y^{\log_a x}$

$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$

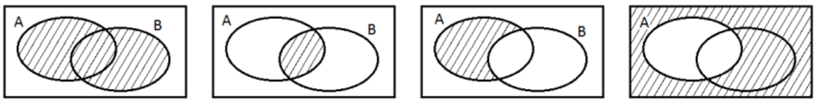
$\log_a x^n=n\cdot\log_a x$ $\quad \log_a\sqrt[n]{x}=\log_a x^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\cdot\log_a x=\frac{\log_a x}{n}$

$\log_{(a^n)} x=\frac{1}{n}\cdot\log_a x$

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

Halmazok

$A\cup B$ $\quad A\cap B$ $\quad A\setminus B$ $\quad \overline{A}$



Logika

Konjukció ~ Logikai és: Értéke pontosan akkor igaz, ha mind a két operandusának igaz a logikai értéke.
Jele: $A\wedge B$ ('A *és* B')

Diszjunkció ~ Logikai megengedő vagy: Akkor hamis, ha mind a két operandusának hamis a logikai értéke.
Jele: $A\vee B$ ('A *vagy* B')

Implikáció ~ Következtetés: Értéke csak akkor hamis, ha $igaz$ értékből $hamis$ következik.
Jele: $A\rightarrow B$ ('A *implikáció* B')

Ekvivalencia: Értéke csak akkor igaz, ha a két operandusának logikai értéke megegyezik.
Jele: $A\leftrightarrow B$ ('A *ekvivalencia* B')

Negáció: Értéke akkor igaz, ha az ítélet hamis. Jele: $\neg A$ ('*nem* A')

Függvények

Lineáris függvény $y = m \cdot x \pm b$

→ m - meredekség

→ b - y tengelymetszet

Másodfokú függvény $y = \pm a \cdot (x \pm b)^2 \pm c$

Abszolútérték fgv $y = \pm a \cdot |x \pm b| \pm c$

Gyökfüggvény $y = \pm a \cdot \sqrt{x \pm b} \pm c$

Törtfüggvény $y = \pm \frac{a}{x \pm b} \pm c = \pm a \cdot \frac{1}{x \pm b} \pm c$

→ a - ennyivel nyújtjuk meg a függvényt

→ negatív a esetén a függvényt tükrözzük x tengelyre

→ ha b pozitív akkor balra, ha negatív, akkor jobbra toljuk a függvényt b-vel

→ ha c pozitív, akkor felfele, ha negatív, akkor lefele toljuk a függvényt c-vel

Jellemzés: ÉT; ÉK; zérushely; monotonitás; szélsőérték

zh. kiszámolása: egyenlővé tesszük a függvényegyenletet 0-val, majd megoldjuk x-re

Gráfok

Pontokból és az ezeket összekötő élekből állnak.

Fontos tétel: A gráfokban a páratlan fokszámú pontok száma mindig páros.

Sorozatok

Tagok: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

<u>Számtani sorozat:</u>

Differencia (d) - két szomszédos tag közti különbség

Bármely tag a szomszédos tagok átlaga (számtani közepe) $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$

$a_n = a_1 + (n-1)d$ n. elem megadása

$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ első n elem összege

<u>Mértani sorozat:</u>

Quociens (q) - két szomszédos tag közti hányados

Bármely tag a szomszédos tagok mértani közepe $a_n = \sqrt{(a_{n-1}) \cdot (a_{n+1})}$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ n. elem megadása

$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$ $(q \neq 1)$ első n elem összege

$S_n = n \cdot a_1$ $(q = 1)$ első n elem összege

Kombinatorika

<u>Permutáció</u>: megadja, hogy hányféleképpen tehető sorba n különböző elem. Képlete: $n!$

<u>Ismétléses permutáció</u>: megadja, hogy hányféleképpen tehető sorba n elem, ha az elemek között van $k;\ l;\ m;\ \ldots$ darab egyforma is. Képlete: $\frac{n!}{k!\cdot l!\cdot m!\cdot\ldots}$

<u>Variáció</u>: megadja, hogy n elemből k elemet hányféleképpen választhatunk ki, ha számít a sorrend.
Képlete: $\frac{n!}{(n-k)!}$

<u>Kombináció</u>: megadja, hogy n elemből k elemet hányféleképpen választhatunk ki, ha nem számít a sorrend.
Képlete: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

Valszám

Az értéke egy 0 (0% - lehetetlen esemény) és 1 (100% - biztos esemény) között lévő szám.

Klasszikus valószínűség: $\frac{\textit{kedvező esetek száma}}{\textit{összes eset}}$

Egymástól független események együttes bekövetkeztének esélye: az egyes események valószínűségét össze kell szorozni.

Magyar kártyapakli: 4 szín *(piros, zöld, makk, tök)* és színenként 8 lap *(VII, VIII, IX, X, alsó, felső, király, ász)* - összesen $4\cdot 8=32$ lap.

Statisztika

Átlag (számtani közép) $\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$

Szórás: az átlagtól való eltérések átlaga $\sigma=\sqrt{\frac{(\overline{x}-x_1)^2+(\overline{x}-x_2)^2+(\overline{x}-x_3)^2+\ldots+(\overline{x}-x_n)^2}{n}}$

Módusz: leggyakoribb érték vagy értékek mod

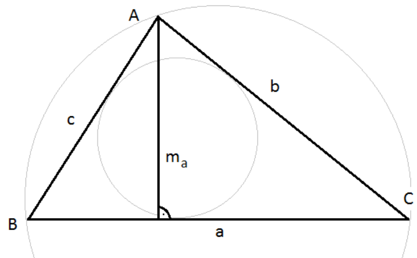
Medián: nagyság szerinti rendezés után a középső érték vagy a középső 2 érték átlaga

Terjedelem: a legnagyobb és legkisebb adat különbsége

Síkgeo

Sokszögek belső szögeinek összege: $(n-2)\cdot 180°$
Sokszögek külső szögeinek összege: $360°$
Egy csúcsból kiinduló átlók száma: $(n-3)$
Összes átlók száma: $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$

Sokszögek kerülete: a határoló oldalak hosszának összege.



Háromszögek területe: $T=\frac{a\cdot m_a}{2}=\frac{b\cdot m_b}{2}=\frac{c\cdot m_c}{2}$

$T=r\cdot s$ $\quad r = beírható\ kör\ sugara$ $\quad s=\frac{K}{2}=\frac{a+b+c}{2}$

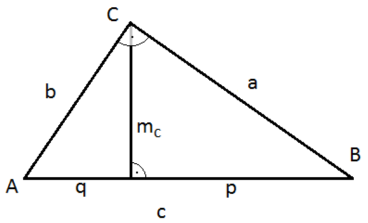
$T=\frac{abc}{4R}$ $\quad R = köréírható\ kör\ sugara$

$T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$T_{szabályos\,\Delta}=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

Pitagoras-tétel: Derékszögű Δ-ben a befogók négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével.

$$c^2=a^2+b^2$$



Szögfelező-tétel: Általános Δ-ekben a szögfelező a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja.
Befogó-tétel: Derékszögű Δ-ekben: $b=\sqrt{qc}$ $\quad a=\sqrt{pc}$
Magasság-tétel: Derékszögű Δ-ekben: $m=\sqrt{pq}$

Nevezetes négyszögek területe:

Trapéz:	$T=\frac{(a+c)\cdot m}{2}$	Paralelogramma:	$T=a\cdot m_a=b\cdot m_b$
Rombusz:	$T=a\cdot m=\frac{e\cdot f}{2}$	Deltoid:	$T=\frac{e\cdot f}{2}$
Téglalap:	$T=a\cdot b$	Négyzet:	$T=a^2$

Kör területe, kerülete:
$T=r^2\pi$ $\quad K=2r\pi$

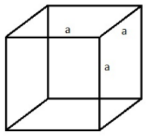
Körcikk területe, kerülete:
$T=r^2\pi\cdot\frac{\alpha}{360°}$ $\quad ív=2r\pi\cdot\frac{\alpha}{360°}$ $\quad K=ív+2r$

Térgeo

Kocka:

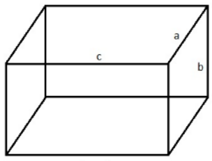
$V = a^3$ $\qquad A = 6a^2$

lapátló: $a \cdot \sqrt{2}$ $\qquad$ testátló: $a \cdot \sqrt{3}$



Téglatest:

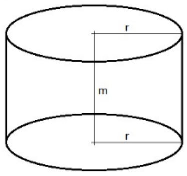
$V = abc$ $\qquad A = 2ab + 2ac + 2bc$



Henger:

$V = T_{alap} \cdot m = r^2\pi \cdot m$ $\qquad A = 2 \cdot T_{alap} + P$

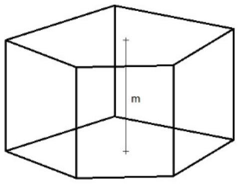
palást: $P = 2r\pi \cdot m$



Hasáb:

$V = T_{alap} \cdot m$ $\qquad A = 2 \cdot T_{alap} + P$

palást: $P = K_{alap} \cdot m$

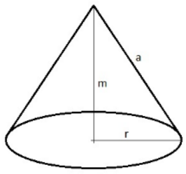


Kúp:

$V = \frac{T_{alap} \cdot m}{3} = \frac{r^2\pi \cdot m}{3}$ $\qquad A = T_{alap} + P$

palást: $P = r\pi a$

alkotó: $a = \sqrt{r^2 + m^2}$

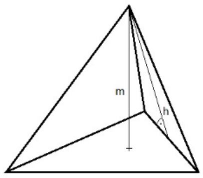


Gúla:

$V = \frac{T_{alap} \cdot m}{3}$ $\qquad A = T_{alap} + P$

szabályos alapú gúla felszíne: $A = T_{alap} + \frac{K_{alap} \cdot h}{2}$

h: palástot alkotó háromszögek magassága

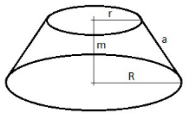


Csonkakúp:

$V = \frac{m \cdot \pi}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ $\qquad A = T_1 + T_2 + P$

$A = R^2\pi + r^2\pi + P$

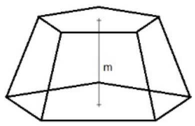
$A = \pi(R^2 + r^2 + (R + r)a)$



Csonkagúla:

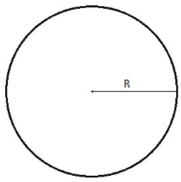
$V = \frac{m}{3}\left(T_1 + \sqrt{T_1 T_2} + T_2\right)$ $\qquad A = T_1 + T_2 + P$

palást - P: a határoló trapézok területösszege



Gömb:

$V = \frac{4}{3}R^3\pi$ $\qquad A = 4R^2\pi$



Hasábok, hengerek térfogata általánosan: $V = T_{alap} \cdot m$

Gúlák, kúpok térfogata általánosan: $V = \frac{T_{alap} \cdot m}{3}$

Beírható és köréírható gömbök, testek: eme problémák legegyszerűbb megoldása, ha a megfelelő nézetből egy síkra vetítjük az adott testeket, úgy pedig síkgeometriai tudással kiszámíthatóak az adatok.

Trigo

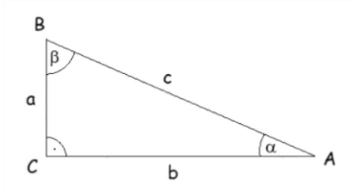
Szögfüggvények derékszögű háromszögekben:

Szinusz (*sinus*): $\sin\alpha = \frac{\alpha\text{–val szemközti befogó}}{\text{átfogó}} = \frac{a}{c}$

Koszinusz (*cosinus*): $\cos\alpha = \frac{\alpha\text{–val szomszédos befogó}}{\text{átfogó}} = \frac{b}{c}$

Tangens (*tangens*): $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\alpha\text{–val szemközti befogó}}{\alpha\text{–val szomszédos befogó}} = \frac{a}{b}$

Kotangens (*cotangens*): $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\alpha\text{–val szomszédos befogó}}{\alpha\text{–val szemközti befogó}} = \frac{b}{a}$



Összefüggések a szögfüggvények között:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $-1 \le \sin\alpha \le 1$ $-1 \le \cos\alpha \le 1$

Cosinus és Sinus tételek:

Cos-tétel: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

Sin-tétel: $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$

Korgeo

Irányvektor: Az a helyvektor, mely párhuzamos az egyenessel.
Normávektor: Az a helyvektor, mely merőleges az egyenesre.
Vektorok elforgatása 90°-al: Koordinátáikat felcserélni, majd az elsőnek az ellentettjét venni.

Két egyenes párhuzamos, ha a meredekségeik megegyeznek.
Két egyenes merőleges, ha meredekségeik egymás negatív reciprokai.

Két pont által meghatározott egyenes képletének felírása:

1) használjuk a függvénytáblabéli képletet, vagy
2) amennyiben leolvasható egyértelműen az y tengely metszete, akkro képlet nélkül a két pont két tengelyen mért különbsége megadja a meredekséget, így pedig felírható az egyenes egyenlete

Egy szakasz hosszának kiszámítása: derékszögű háromszöget illesztünk rá úgy, hogy a két befogó legyen párhuzamos a tengelyekkel, a hiányzó szakasz pedig legyen a háromszög átfogója; majd Pitagoras-tétellel kiszámoljuk az átfogót, a befogók hossza pedig leolvasható.

Két alakzat metszéspontja(i): az alakzatok egyenleteit egyenletrendszerként kezeljük, majd megoldjuk.

Egyenes egyenlete: $y = m \cdot x + b$ → m: meredekség b: y tengely metszése
Kör egyenlete: $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$ → $K(u; v)$: kör közepe r: kör sugara