

Totál alap példák érettségire - megoldás

Számelmélet, algebra

① Osztható-e a 480 a következő számokkal?

a) - j) 2-vel; 3-mal; 4-el; 5-tel; 6-tal; 8-cal; 9-cel; 10-el; 12-vel; 15-tel?

I I I I I I N I I I  
(oszthatósági szabályok szerint)

② Add meg a 36-nak és a 48-nak

a) a legnagyobb közös osztóját!  $(36; 48) =$

b) a legkisebb közös többszörösét!  $[36; 48] =$

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$48 = 2^4 \cdot 3^1$$

$$\text{LNKO} \rightarrow (36; 48) = 2^2 \cdot 3^1 = 12$$

$$\text{LKKT} \rightarrow [36; 48] = 2^4 \cdot 3^2 = 144$$

③ Írd fel a következő számokat római számjegyekkel!

a) - d) 24      102      523      2893  
XXIV      CII      DXXIII      MM DCCC XC III

④ Váltás át a számrendszerek között - írd fel a

a) 97-et 2-es számrendszerbe!

$$97:2 = 48 \quad m:1$$

$$48:2 = 24 \quad m:0$$

$$24:2 = 12 \quad m:0$$

$$12:2 = 6 \quad m:0$$

$$6:2 = 3 \quad m:0$$

$$3:2 = 1 \quad m:1$$

$$1:2 = 0 \quad m:1$$

$$97 = 1100001_2$$

b)  $100110_2$  kettes számrendszerbeli számot tízes számrendszerbe!

$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$
32	16	8	4	2	1
1	0	0	1	1	0

$$1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 38$$

$$100110_2 = 38$$

- c)  $102_3$  hármas számrendszerbeli számot 5-ös számrendszerbe!  
(először a köztes 10-es számrendszerbe váltunk, majd az 5-ösbe)

$3^2$	$3^1$	$3^0$
9	3	1
1	0	2

$$1 \cdot 9 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 11 \quad 102_3 = 11$$

$$11 : 5 = 2 \quad m: 1$$

$$2 : 5 = 0 \quad m: 2$$

$$11 = 21_5$$

$$102_3 = 11_{10} = 21_5$$

- ⑤ Add meg a következő számok normálalakját!

a) - d)  $120\,000\,000$      $150\,080\,000$      $0,000\,007$      $0,000\,000\,104$   
 $1,2 \cdot 10^8$      $1,508 \cdot 10^8$      $7 \cdot 10^{-6}$      $1,04 \cdot 10^{-7}$

- ⑥ Váltsd át az adott mértékeket!

a) - b)  $9,58\,m = 958\,cm$      $23\,000\,mm = 230\,dm$   
c) - d)  $12\,dm^2 = 1\,200\,cm^2$      $780\,000\,000\,mm^2 = 780\,m^2$   
e) - f)  $5,2\,cm^3 = 520\,mm^3$      $99\,000\,000\,dm^3 = 99\,000\,m^3$   
g) - h)  $23\,dkg = 230\,g$      $12\,000\,g = 12\,kg$   
i) - j)  $57\,l = 5\,700\,cl$      $820\,000\,ml = 8\,200\,dl$

- ⑦ a) 6,5 liter 2,8%-os zsírtartalmú tej mennyi zsírt tartalmaz?

Tehát mennyi a 6,5-nek a 2,5%-a

$$1\%-a: \quad 6,5 : 100 = 0,065$$

$$2,8\%-a: \quad 0,065 \cdot 2,8 = 0,182 \quad \text{Tehát } 0,182 \text{ liter zsírt tartalmaz.}$$

- b) Egy pulóver árát 20%-al csökkentették, így most 1300 Ft-ba kerül. Mennyi volt eredetileg?

$$\text{Tehát } 100 - 20 = 80\% \text{ -al egyenő az } 1300, \text{ tehát az } 1\% = 1300 : 80 = 16,25$$

$$\text{Eredetileg pedig } 100\% = 16,25 \cdot 100 = 1625 \text{ Ft}$$

- c) Hány %-al lépem túl a sebességhatárt, ha 90 helyett 110-el hajtok?

$$\text{Itt a } 90 = 100\%, \text{ tehát } 1\% = 0,9.$$

$$110 : 0,9 = 122, \text{ így } 22\% \text{-al lépem túl a } 100\% \text{-ot (90 km/h-t)}$$

- ⑧ Alakítsd át teljes négyzetté a következő kifejezéseket!

a) - c)  $x^2 + 4x + 6$      $x^2 - 5x + 10$      $2x^2 + 12x - 3$

$$x^2 + 4x + 6 = (x + 2)^2 + 2$$

$$\rightarrow (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 - 5x + 10 = (x - 2,5)^2 + 3,75$$

$$\rightarrow (x - 2,5)^2 = x^2 - 5x + 6,25$$

$$2x^2 + 12x - 3 = 2(x^2 + 6x) - 3$$

$$\rightarrow x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$$

$$2[(x + 3)^2 - 9] - 3 = 2(x + 3)^2 - 18 - 3 = 2(x + 3)^2 - 21$$

⑨ Végezd el a következő műveleteket!

a) - d)  $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$     $\frac{1}{5} - \frac{6}{7}$     $\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{2}$     $\frac{8}{3} : \frac{5}{6}$     $\frac{2}{3} + \frac{5}{2} - \frac{1}{6}$

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10+12}{15} = \frac{22}{15}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{6}{7} = \frac{7-30}{35} = -\frac{23}{35}$$

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{6 \cdot 2} = \frac{12}{12} = 1$$

$$\frac{8}{3} : \frac{5}{6} = \frac{8}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{48}{15} = \frac{16}{5}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4+15-1}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

⑩ Add meg a következő kifejezések értékét!

a)  $5 + (8 \cdot (3 - 6) - 4) - 9$   
 $= 5 + (8 \cdot (-3) - 4) - 9 = 5 + (-24 - 4) - 9 = 5 + (-28) - 4 = 5 - 28 - 9 = -32$

b)  $\frac{1}{3} : \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) - \frac{2}{11}$   
 $= \frac{1}{3} : \left(\frac{8+3}{12}\right) - \frac{2}{11} = \frac{1}{3} : \frac{11}{12} - \frac{2}{11} = \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{11} - \frac{2}{11} = \frac{12}{33} - \frac{2}{11} = \frac{4}{11} - \frac{2}{11} = \frac{2}{11}$

## Egyenletek

① Oldd meg a következő elsőfokú egyenleteket!

a)  $3x + 8 = 5 - 4x$    /  $-8$   
 $7x = -3$    /  $+4x$   
 $x = -\frac{3}{7}$    /  $:7$

b)  $\frac{2x+4}{2} = \frac{10x-6}{3}$    /  $\cdot 6$   
 $3 \cdot (2x + 4) = 2 \cdot (10x - 6)$   
 $6x + 12 = 20x - 12$    /  $+12$   
 $24 = 14x$    /  $-6x$   
 $x = \frac{24}{14} = \frac{12}{7}$    /  $:14$

c)  $(3x - 2)(5 + x)(2x + 1) = 0$   
 egy szorzat akkor lesz 0, ha valamely tényezője 0  
 $3x - 2 = 0 \rightarrow 3x = 2 \rightarrow x_1 = \frac{2}{3}$   
 $5 + x = 0 \rightarrow x_2 = -5$   
 $2x + 1 = 0 \rightarrow 2x = -1 \rightarrow x_3 = -\frac{1}{2}$

② Oldd meg a következő másodfokú egyenleteket!

Megoldóképlet:  $x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

a)  $2x^2 + 5x - 8 = 0$   
 $x_{1;2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 64}}{4} = \frac{-5 \pm 9,64}{4} \rightarrow x_1 = 1,16 \quad x_2 = -3,66$

b)  $-3x^2 + 6x + 1 = 0$   
 $x_{1;2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 1}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 12}}{-6} = \frac{-6 \pm 6,96}{-6} \rightarrow x_1 = -0,16 \quad x_2 = 2,16$

## Hatvány, gyök, log, exp

① Add meg a következő hatványok értékét!

a) - e)  $\left(\frac{3}{4}\right)^2$   $\left(\frac{1}{3^2}\right)^{-3}$   $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{2}{4}}$   $\left(\frac{8}{3}\right)^{-\frac{4}{5}}$   $\left(\frac{2}{\frac{1}{5^2}}\right)^{\frac{2}{3}}$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

$$\left(\frac{1}{3^2}\right)^{-3} = \frac{1^{-3}}{(3^2)^{-3}} = \frac{1}{3^{-6}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^6} = \frac{1}{\frac{1}{3^6}} = 3^6$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{2}{4}} = \frac{5^{\frac{2}{4}}}{3^{\frac{2}{4}}} = \frac{\sqrt[4]{5^2}}{\sqrt[4]{3^2}} = \sqrt[4]{\frac{25}{9}}$$

$$\left(\frac{8}{3}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{\frac{3^4}{8^4}} = \sqrt[5]{\left(\frac{3}{8}\right)^4}$$

$$\left(\frac{2}{\frac{1}{5^2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{1}{5^2}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{\frac{1}{5^{\frac{4}{3}}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{\frac{1}{5^{\frac{4}{3}}}} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5^4}$$

② Bontsd fel a zárójeleket!

a) - d)  $(3x + 5y)^2$   $\left(\frac{2}{3}b + 5\right)^2$   $(8 - 3z)^2$   $\left(2h - \frac{1}{4}p\right)^2$

$$(3x + 5y)^2 = 9x^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5y + 25y^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$$

$$\left(\frac{2}{3}b + 5\right)^2 = \frac{4}{9}b^2 + \frac{20}{3}b + 25$$

$$(8 - 3z)^2 = 64 - 48z + 9z^2$$

$$\left(2h - \frac{1}{4}p\right)^2 = 4h^2 - hp + \frac{1}{16}p^2$$

③ Egyszerűsítsd a következő kifejezéseket!

a)  $\left(-\frac{2}{5}x^6y^2\right) \cdot (-4xy^4)$  b)  $\frac{\sqrt{x} \cdot (x^5)^3}{x^7}$

$$\left(-\frac{2}{5}x^6y^2\right) \cdot (-4xy^4) = \frac{8}{5}x^7y^6 = \frac{8x^7y^6}{5} = \frac{2^3x^7y^6}{5}$$

$$\frac{\sqrt{x} \cdot (x^5)^3}{x^7} = \frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{15}}{x^7} = \frac{x^{15,5}}{x^7} = x^{15,5-7} = x^{8,5}$$

④ Gyöktelenítsd a nevezőket!

a) - d)  $\frac{2}{\sqrt{7}}$   $\frac{5}{3\sqrt{2}}$   $\frac{33}{3\sqrt{2}+\sqrt{7}}$   $\frac{\sqrt{a}-3}{2\sqrt{a}+4}$

$$\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{2 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{2 \cdot \sqrt{7}}{7}$$

$$\frac{5}{3\sqrt{2}} = \frac{5}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6} \cdot \sqrt{2}$$

$$\frac{33}{3\sqrt{2}+\sqrt{7}} = \frac{33}{3\sqrt{2}+\sqrt{7}} \cdot \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{7}}{3\sqrt{2}-\sqrt{7}} = \frac{33(3\sqrt{2}-\sqrt{7})}{(3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{7})^2} = \frac{33(3\sqrt{2}-\sqrt{7})}{18-7} = \frac{99\sqrt{2}-33\sqrt{7}}{11}$$

$$\frac{\sqrt{a}-3}{2\sqrt{a}+4} = \frac{\sqrt{a}-3}{2\sqrt{a}+4} \cdot \frac{2\sqrt{a}-4}{2\sqrt{a}-4} = \frac{(\sqrt{a}-3) \cdot (2\sqrt{a}-4)}{(2\sqrt{a})^2 - (4)^2} = \frac{2a-4\sqrt{a}-6\sqrt{a}+12}{4a-16} = \frac{2a-10\sqrt{a}+12}{4a-16} = \dots$$

⑤ Végezd el a következő műveleteket!

a)  $\frac{4\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}}$

b)  $\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}} + \frac{6\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}$

$$\frac{4\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}-4}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-5}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{3}-5)}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{2\cdot 3-5\sqrt{3}}{3} = 2 - \frac{5\sqrt{3}}{3} = 2 - \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}} + \frac{6\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{2}+3) + \sqrt{2}(6\sqrt{5}-1)}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}+3\sqrt{5}+6\sqrt{10}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}+3\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$$

⑥ Add meg a logaritmusok értékeit!

a) - e)	$\log_3 27$	$\log_2 64$	$\log_5 625$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64}$	$\log_{\frac{1}{3}} 81$
	= 3	= 6	= 4	= 6	= -4
	...	, mert $2^6 = 64$	...	...	...

⑦ Oldd meg a következő log és exp egyenleteket!

a)  $\lg(x-6) + \lg(2x-14) = 3 - \lg 25$

kikötés:  $x-6 > 0 \rightarrow x > 6$

$2x-14 > 0 \rightarrow x > 7$

$\lg[(x-6)(2x-14)] = \lg \frac{1000}{25} \rightarrow$  mert  $3 = \lg 1000$

$\lg(2x^2 - 14x - 12x + 84) = \lg 40$

log. fgv. szig. mon.

$2x^2 - 26x + 84 = 40$

$2x^2 - 26x - 44 = 0$

...  $x_1 = -1,5 \rightarrow$  kikötés miatt elelmentmondás

$x_2 = 14,5$

b)  $24 \cdot 5^{2x-1} + 4 \cdot 5^x - 5^{x-1} = 619$

$24 \cdot \frac{5^{2x}}{5^1} + 4 \cdot 5^x - \frac{5^x}{5^1} = 619 \quad / \cdot 5$

$24 \cdot 5^{2x} + 20 \cdot 5^x - 5^x = 3095 \quad / 5^x := a$

$24a^2 + 20a - a = 3095$

$24a^2 + 19a - 3095 = 0$

...  $a_1 = -11,76 \rightarrow 5^x = -11,76 \rightarrow$  ellentmondás, az 5 minden hatványa pozitív

$a_2 = 10,97 \rightarrow 5^x = 10,97$

$5^x = 10,97$

$\lg 5^x = \lg 10,97$

$x \cdot \lg 5 = \lg 10,97$

$x = \frac{\lg 10,97}{\lg 5} = 1,488$

## Halmazok

① Add meg  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$  és  $\bar{A}$  halmazokat a  $H$  alaphalmazon!

$A = \{\text{egyjegyű páratlan számok}\} = \{1; 3; 5; 7; 9\}$

$B = \{\text{egyjegyű prímek}\} = \{2; 3; 5; 7\}$

$H = \{10 - \text{nél kisebb pozitív egészek}\} = \{1; 2; \dots; 8; 9\}$

$A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 7; 9\}$

$A \cap B = \{3; 5; 7\}$

$A \setminus B = \{1; 9\}$

$\bar{A} = \{2; 4; 6; 8\}$

- ② Egy 30 fős osztályban mindenki sportol, vagy focizhatnak vagy kosarazhatnak. Tudjuk, hogy 22-en fociznak és 16-an kosaraznak. Hányan űzik mindkét sportot egyszerre?  
30-an sportolnak, 22 focista és 16 kosaras van ebből  
 $22 + 16 = 38 \rightarrow 8\text{-al több, mint a } 30, \text{ így } 8\text{-an játszóknak egyszerre a két játékot.}$

## Logika

- ① Töltsd ki az igazságtáblát! (1 – igaz; 0 – hamis)

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$\neg A$	$(A \vee B) \vee (A \rightarrow B)$
1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1

- ② Tagadd a következő mondatokat!

a) Minden gyerek szereti a fagyit.

Van olyan gyerek, aki nem szereti a fagyit.

b) Van olyan autó, aminek csak 3 kereke van.

Semelyik autónak nincs 3 kereke. (Minden autónak nem 3 kereke van.)

## Függvények

- ① Ábrázold a következő függvényeket!

a)  $f(x): y = \frac{1}{2}x + 2$

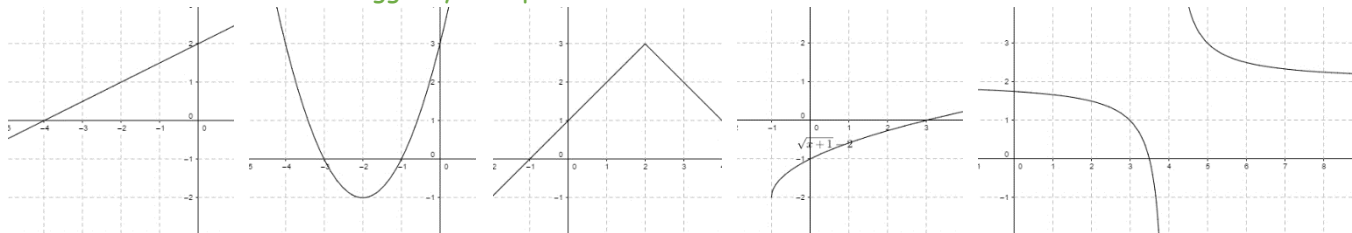
b)  $f(x): y = (x + 2)^2 - 1 \rightarrow$  ezt jellemezd is!

c)  $f(x): y = -|x - 2| + 3$

d)  $f(x): y = \sqrt{x + 1} - 2$

e)  $f(x): y = \frac{1}{x-4} + 2$

Sorban a függvények képei:



$y = (x + 2)^2 - 1$  (parabola) jellemzése:

ÉT:  $x \in \mathbb{R}$

ÉK:  $y \in \mathbb{R}$

zh:  $(x + 2)^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 + 4x + 4 - 1 = 0 \rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \rightarrow x_1 = -3 \quad x_2 = -1$

monotonitás: szig.mon.cs a  $]-\infty; -2]$  -on

szig.mon.nő a  $[-2; \infty[$  -on

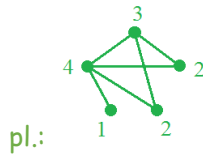
szélsőérték: max nincs

min hely:  $x = -2$

min érték:  $y = -1$

## Gráfok

- ① Adj meg egy olyan 5 pontú gráfot, melynek fokszámai: 4; 3; 2; 2; 1.



## Sorozatok

- ① Add meg a következő számtani sorozat hiányzó elemeit!

$$a_1 = 8 \qquad d = 2,5 \qquad a_7 \qquad S_{11}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \qquad \rightarrow \qquad a_7 = 8 + (7 - 1) \cdot 2,5 = 23$$

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n - 1) \cdot d) \qquad \rightarrow \qquad S_{11} = \frac{11}{2} \cdot (2 \cdot 8 + (11 - 1) \cdot 2,5) = 225,5$$

- ② Add meg a következő mértani sorozat hiányzó elemeit!

$$a_1 = 4 \qquad q = 1,2 \qquad a_5 \qquad S_9$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \qquad \rightarrow \qquad a_5 = 4 \cdot 1,2^{5-1} = 8,3$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \qquad \rightarrow \qquad S_9 = \frac{4 \cdot (1,2^9 - 1)}{1,2 - 1} = 83,2$$

## Kombinatorika

- ① 12 db különböző könyvet hányféleképpen tehetünk sorba?

$$12! = 479\,001\,600$$

- ② 3 db ezrest, 4 db ötszázast, illetve 1-1 húszezrest, tízezrest, ötezrest és kétezrest hányféleképpen tehetünk sorba?

$$\frac{11!}{3! \cdot 4!} = 277\,200$$

- ③ Egy 32 fős osztályból hányféleképpen választhatunk ki véletlenszerűen 5 embert?

$$\binom{32}{5} = 201\,376$$

## Valszám

- ① Egy szabályos 6 oldalú dobókockával dobálunk.

- a) Mekkora eséllyel dobok 4-est?

$$p_{(4-es)} = \frac{1}{6}$$

- b) Egymás után kétszer dobva mekkora eséllyel dobok 2 db 5-öst?

$$p_{(2db\ 5-ös)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

③ Egy 32 lapos magyar kártyapakliból húzok kártyákat.

a) Mekkora eséllyel húzhatom ki a piros ászt?

$$p(\text{piros ász}) = \frac{1}{32}$$

b) Mekkora eséllyel nem lesz a húzásom zöld?

$$p(\text{zöld}) = \frac{8}{32} \quad p(\text{nem zöld}) = 1 - \frac{8}{32} = \frac{24}{32}$$

## Stat

① 2001. január első 10 napján végig havazott, a következő mennyiségű hó hullott:  
2 cm; 5 cm; 4 cm; 4 cm; 1 cm; 3 cm; 4 cm; 2 cm; 6 cm; 4 cm

a) Mekkora az adatsorunk átlaga, módusza, mediánja, terjedelme és szórása?

$$\text{átlag: } \frac{2+5+4+4+1+3+4+2+6+4}{10} = 3,5$$

adatok sorban: 1; 2; 2; 3; 4; 4; 4; 4; 5; 6

medián: 4 (középső érték)

módusz: 4 (leggyakoribb érték)

terjedelem:  $6 - 1 = 5$

$$\text{szórás: } \sqrt{\frac{1 \cdot (3,5-1)^2 + 2 \cdot (3,5-2)^2 + 1 \cdot (3,5-3)^2 + 4 \cdot (3,5-4)^2 + 1 \cdot (3,5-5)^2 + 1 \cdot (3,5-6)^2}{10}} = 1,43$$

b) Ábrázold az adatokat oszlopdiagramon, illetve kördiagramon!

mm	1	2	3	4	5	6
db	1	2	1	4	1	1

összesen 10 adat van, tehát adatonként a kördiagramon  $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$

$$1\text{mm} \rightarrow 1\text{db} \rightarrow 1 \cdot 36^\circ = 36^\circ$$

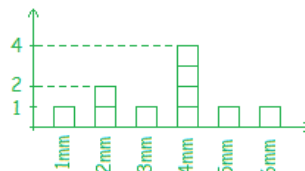
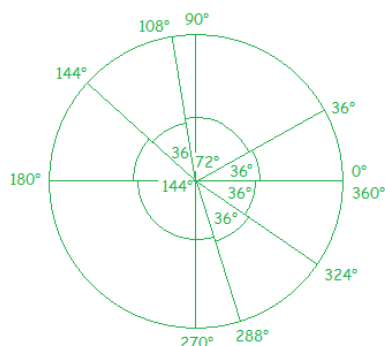
$$2\text{mm} \rightarrow 2\text{db} \rightarrow 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$$

$$3\text{mm} \rightarrow 1\text{db} \rightarrow 1 \cdot 36^\circ = 36^\circ$$

$$4\text{mm} \rightarrow 4\text{db} \rightarrow 4 \cdot 36^\circ = 144^\circ$$

$$5\text{mm} \rightarrow 1\text{db} \rightarrow 1 \cdot 36^\circ = 36^\circ$$

$$6\text{mm} \rightarrow 1\text{db} \rightarrow 1 \cdot 36^\circ = 36^\circ$$





Síkgeo

- ① Egy háromszög szögeinek aránya 4:5:6. Mekkora a háromszög szögei?

A  $\Delta$  szögeinek összege  $180^\circ$ , így az arányokat átírva:

$$4x + 5x + 6x = 15x = 180^\circ$$

$$x = 12^\circ \rightarrow 4x = 48^\circ \rightarrow 5x = 60^\circ \rightarrow 6x = 72^\circ$$

- ② Egy négyszög oldalai  $a = 1,2$ ;  $b = 1,8$ ;  $c = 2,4$  és  $d = 3,3$  cm hosszúak. Kicsinyített képén  $d' = 2,2$  cm. Mekkora a kicsinyített kép többi oldala?

Az új négyszög a régiből lett kicsinyítve, így hasonlóak, tehát oldalai aránya megegyezik.

Az eredeti 3,3 cm 2,2 cm lett, azaz  $\frac{2,2}{3,3}$ -al szoroztunk. A többi oldalt is beszorozva ezzel:

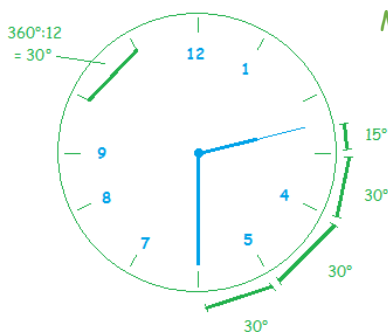
$$a' = 1,2 \cdot \frac{2,2}{3,3} = 0,8 \text{ cm}$$

$$b' = 1,8 \cdot \frac{2,2}{3,3} = 1,2 \text{ cm}$$

$$c' = 2,4 \cdot \frac{2,2}{3,3} = 1,6 \text{ cm}$$

- ③ Mekkora szöget zár be egymással az óra kis- és nagymutatója 02:30 -kor?

Mint az ábrán is látszik:  $3 \cdot 30^\circ + 15^\circ = 105^\circ$ -ot zár be



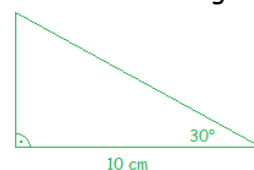
- ④ Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge  $30^\circ$ , a mellette lévő befogó 10 cm. Mekkora az átfogó?

Szögfüggvényt használunk:

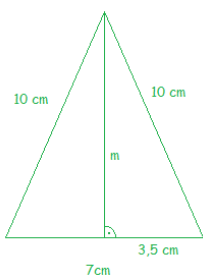
$$\cos \alpha = \frac{\text{szöggel szomszédos befogó}}{\text{átfogó}}$$

$$\rightarrow \cos 30^\circ = \frac{10}{\text{átfogó}}$$

$$\rightarrow \text{átfogó} = \frac{10}{\cos 30^\circ} = 11,5 \text{ cm}$$



- ⑤ Egy egyenlő szárú háromszög oldalai 10, 10 és 7 cm hosszúak. Mekkora a területe?



Az egyenlő szárú  $\Delta$  felbontható 2 derékszögű  $\Delta$ -re, melyből így Pitagoras-tétellel számolható a magasság:

$$3,5^2 + m^2 = 10^2 \rightarrow m^2 = 100 - 12,25 = 87,75$$

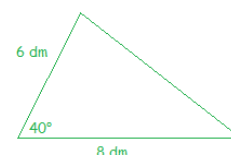
$$m = 9,4 \text{ cm}$$

$$T_{\Delta} = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{7 \cdot 9,4}{2} = 32,9 \text{ cm}^2$$

- ⑥ Egy háromszög egyik szöge  $40^\circ$ , a mellette lévő oldalak pedig 6 és 8 dm hosszúak. Mekkora a területe?

~~cos tétellel oldható meg:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$  de egyszerűbb, ha Trigonometrikus területképletet alkalmazzuk:~~

$$T_{\Delta} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} = \frac{6 \cdot 8 \cdot \sin 40^\circ}{2} = 15,4 \text{ dm}^2$$



⑦ Egy kör átmérője 3 m.

a) Mekkora a kör területe és kerülete?

$$T_o = r^2 \pi = 3^2 \pi = 9\pi m^2$$

$$K_o = 2r\pi = 2 \cdot 3 \cdot \pi = 6\pi m$$

b) Ebből a körből egy 30°-os középponti szögű körcikket vágunk ki. Mekkora a területe?

$$T_{cikkk} = r^2 \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 3^2 \pi \cdot \frac{30^\circ}{360^\circ} = 0,75\pi m^2$$

$$\acute{iv} = 2r\pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 2 \cdot 3 \cdot \pi \cdot \frac{30^\circ}{360^\circ} = 0,5\pi m$$

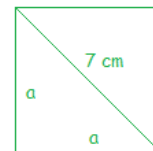
$$K_{cikkk} = \acute{iv} + 2r = 0,5\pi + 6 m$$

⑧ Egy négyzet átlója 7 cm, mekkora a kerülete és a területe?

Pitagoras-tétellel egyszerűen számolhatóak az oldalak, majd abból a terület

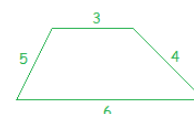
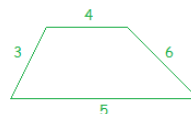
$$a^2 + a^2 = 7^2 \rightarrow 2a^2 = 49 \rightarrow a^2 = 24,5$$

$$T_{\blacksquare} = a^2 = 24,5 cm^2$$

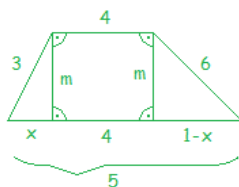


⑨ Egy trapéz oldalai sorban 3, 4, 6 és 5 cm hosszúak. Mekkora a területe?

Mivel az oldalak sorban vannak megadva, két megoldás létezik: A párhuzamos oldalak vagy a 3 és 6 cm hosszúságúak, vagy a 4 és 5 cm-esek.



$$T_{trapéz} = \frac{(a+c) \cdot m}{2} \rightarrow \text{Tehát csak az } m \text{-et kell kiszámolnunk és alkalmazható is a képlet}$$



Pitagoras-tételek felírása a két derékszögű Δ-re:

$$\text{I. } x^2 + m^2 = 3^2 \rightarrow m^2 = 9 - x^2$$

$$\text{II. } (1-x)^2 + m^2 = 6^2 \rightarrow (1-x)^2 + m^2 = 36$$

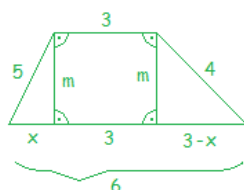
$$\text{II. } (1-x)^2 + [9 - x^2] = 36$$

$$1 - 2x + x^2 + 9 - x^2 = 36$$

$$10 - 2x = 36 \rightarrow -26 = 2x \rightarrow x = -13$$

$$\text{I. } m^2 = 9 - x^2 \rightarrow m^2 = 9 - (-13)^2$$

$$m^2 = 9 - 169 \rightarrow \text{ellentmondás} \rightarrow \text{nincs ilyen trapéz}$$



Másik trapézzal számolva:

$$\text{I. } x^2 + m^2 = 5^2 \rightarrow m^2 = 25 - x^2$$

$$\text{II. } (3-x)^2 + m^2 = 4^2 \rightarrow (3-x)^2 + m^2 = 16$$

$$\text{II. } (3-x)^2 + [25 - x^2] = 16$$

$$9 - 6x + x^2 + 25 - x^2 = 16$$

$$34 - 6x = 16 \rightarrow 18 = 6x \rightarrow x = 3$$

$$\text{I. } m^2 = 25 - x^2 = 25 - 3^2 = 16$$

$$m = 4 \text{ (ügye a } -4 \text{ nincs értelmezve)}$$

$$T_{trapéz} = \frac{(a+c) \cdot m}{2} = \frac{(6+3) \cdot 4}{2} = 18 cm^2$$

⑩ Mekkora az 5 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög beírható körének területe?

Szabályos Δ-re, illetve beírható körre is van Δ T-képlet, elég azokat alkalmazni:

$$T_{szabályos \Delta} = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4} = \frac{\sqrt{3} \cdot 5^2}{4} = 10,8 cm^2$$

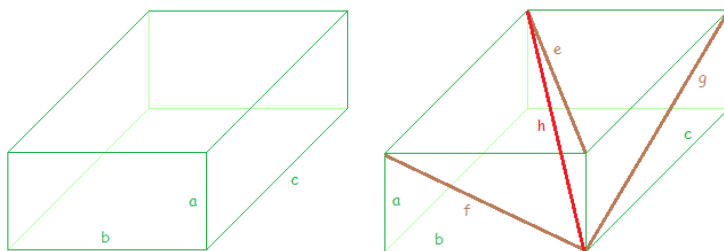
$$r = \text{beírható kör sugara}; s = \frac{K}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2} = 7,5$$

$$T_{\Delta} = r \cdot s \rightarrow 10,8 = r \cdot 7,5 \rightarrow r = 1,44 cm$$

$$T_o = r^2 \pi = 1,44^2 \pi = 2,1\pi cm^2$$

## Térgeó

- ① Vegyünk egy 4; 5 és 6 cm élhosszúságú téglatestet?



- a) Mekkora a lapátlója és testátlója?

A téglatest lapátlói páronként egyezők, illetve a 4 testátlója egyforma hosszú. Az ábráról leolvassa Pitagoras-tétellel mindegyik számolható.

$$e^2 = b^2 + c^2 = 5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61 \rightarrow e = 7,8 \text{ cm}$$

$$f^2 = a^2 + b^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41 \rightarrow f = 6,4 \text{ cm}$$

$$g^2 = a^2 + c^2 = 4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52 \rightarrow g = 7,2 \text{ cm}$$

$$h^2 = a^2 + e^2 = 4^2 + 61 = 77 \rightarrow 8,4 \text{ cm}$$

- b) Mekkora a felszíne és térfogata?

$$V_{\text{téglatest}} = a \cdot b \cdot c = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 \text{ cm}^3$$

$$A_{\text{téglatest}} = 2ab + 2ac + 2bc = 2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 5 \cdot 6 = 40 + 48 + 60 = 148 \text{ cm}^2$$

- ② Egy háromszög alapú hasáb magassága 10 m, alapjának oldalai 3; 4 és 5 m hosszúak.

Mekkora a felszíne és térfogata?

$$V_{\text{hasáb}} = T_{\text{alap}} \cdot m$$

$$A_{\text{hasáb}} = T_{\text{alap}} + T_{\text{oldallapok}}$$

Az alap  $\Delta$  területét sokféleképpen kiszámíthatjuk.

(pl. Héron képlet, alap T-képletek, cos-tétel segítségével, stb.)

$$T_{\text{alap}} = 6 \text{ m}^2$$

Az oldallapok úgye mind téglalapok:  $T_{\text{téglalap}} = a \cdot b$

$$T_{1.\text{téglalap}} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ m}^2$$

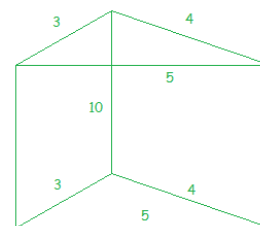
$$T_{2.\text{téglalap}} = 4 \cdot 5 = 20 \text{ m}^2$$

$$T_{3.\text{téglalap}} = 3 \cdot 5 = 15 \text{ m}^2$$

$$T_{\text{oldallapok}} = T_{1.\text{téglalap}} + T_{2.\text{téglalap}} + T_{3.\text{téglalap}} = 12 + 20 + 15 = 47 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{hasáb}} = T_{\text{alap}} + T_{\text{oldallapok}} = 6 + 47 = 53 \text{ m}^2$$

$$V_{\text{hasáb}} = T_{\text{alap}} \cdot m = 6 \cdot 10 = 60 \text{ m}^3$$



- ③ Mekkora a magassága és felszíne annak a hengernek, melynek térfogata  $864 \text{ m}^3$ , alapsugara pedig 5 m ?

$$T_{\text{alap(kör)}} = r^2 \pi = 5^2 \pi = 25 \pi \text{ m}^2$$

$$V_{\text{henger}} = T_{\text{alap}} \cdot M \rightarrow 864 = 25 \pi \cdot M \rightarrow M = 11 \text{ m}$$

$$A_{\text{henger}} = 2 \cdot T_{\text{alap}} + \text{palást}$$

A palást úgye egy (feltekert) téglalap, melynek egyik oldala a henger magassága ( $M$ ), másik az alapkör kerülete.

$$K_{\text{alapkör}} = 2r \pi = 10 \pi \rightarrow \text{palást} = M \cdot K_{\text{alapkör}} = 11 \cdot 10 \pi = 345,6 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{henger}} = 2 \cdot T_{\text{alap}} + \text{palást} = 2 \cdot 25 \pi + 345,6 = 502,7 \text{ m}^2$$

- ④ Egy négyzet alapú gúla magassága  $6\text{ dm}$ , alapterülete  $16\text{ dm}^2$ . Mekkora a felszíne és térfogata?

Az alapterületből (négyzetből) kiszámítható az oldalak hossza

$$T_{\text{alap}} = a^2 = 16 \rightarrow a = 4\text{ dm}$$

$$V_{\text{gúla}} = \frac{T_{\text{alap}} \cdot M}{3} = \frac{16 \cdot 6}{3} = 32\text{ dm}^3$$

$$A_{\text{négyzetes gúla}} = T_{\text{alap}} + 4 \cdot T_{\text{ABP}\Delta}$$

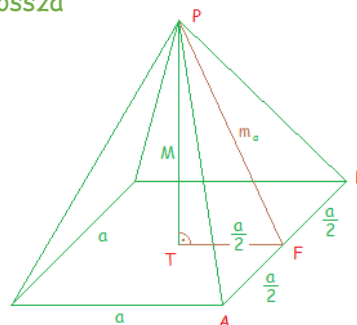
$T_{\text{ABP}\Delta}$  kiszámításához szükséges  $m_a$

$m_a$  -t Pitagoras-tétellel számolhatjuk  $TFP\Delta$  ből

$$m_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + M^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 6^2 \rightarrow m_a = 6,3\text{ dm}$$

$$T_{\text{ABP}\Delta} = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{4 \cdot 6,3}{2} = 12,6\text{ dm}^2$$

$$A_{\text{négyzetes gúla}} = T_{\text{alap}} + 4 \cdot T_{\text{ABP}\Delta} = 16 + 4 \cdot 12,6 = 66,4\text{ dm}^2$$



- ⑤ Egy kúp alapsugara  $120\text{ mm}$ , magassága az alapterületének a negyede. Mekkora a felszíne és térfogata?

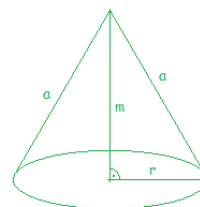
$$r = 120\text{ mm} \rightarrow K_{\text{alap}} = 2r\pi = 754\text{ mm}$$

$$m = \frac{K}{4} = \frac{754}{4} = 188,5\text{ mm}$$

$$a^2 = r^2 + m^2 \rightarrow a = \sqrt{r^2 + m^2} = 223,5\text{ mm}$$

$$V_{\text{kúp}} = \frac{T_{\text{alap}} \cdot m}{3} = \frac{r^2 \pi m}{3} = 2\,842,5\text{ mm}^3$$

$$A_{\text{kúp}} = T_{\text{alap}} + \text{palást} = r^2 \pi + ar\pi = 129\,496\text{ mm}^2$$



- ⑥ Egy  $60\text{ cm}$  átmérőjű labdába hány dl levegő fér?

$$d = 60\text{ cm} \rightarrow R = 30\text{ cm}$$

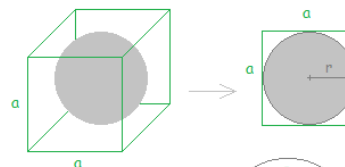
$$V_{\text{gömb}} = \frac{4}{3}R^3 \pi = \frac{4}{3} \cdot 30^3 \cdot \pi = 130\,097\text{ cm}^3 \approx 130\text{ dm}^3 = 130\text{ l} = 1\,300\text{ dl}$$

- ⑦ a) Mekkora a  $729\text{ m}^3$  térfogatú kockába írható gömb sugara?

$$V_{\text{kocka}} = a^3 \rightarrow 729 = a^3 \rightarrow a = 9\text{ m}$$

Be- és köréírható testeknél érdemes síkba vetíteni  $\rightarrow$

$$r = \frac{a}{2} = \frac{9}{2} = 4,5\text{ m}$$



- b) Mekkora a köréírható gömbjének felszíne?

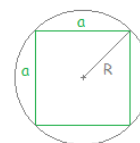
Itt ismét érdemes levetíteni a síkra  $\rightarrow$

Látszik, hogy a kör (gömb) átmérője a négyzet átlója, tehát

a sugara a négyzet átlójának a fele. Pitagoras-tétellel számolva:

$$(2R)^2 = a^2 + a^2 \rightarrow 4R^2 = 2a^2 \rightarrow R^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{9^2}{2} = 40,5 \rightarrow R = 6,4\text{ m}$$

$$A_{\text{gömb}} = 4R^2 \pi = 4 \cdot 6,4^2 \cdot \pi = 514,7\text{ m}^2$$



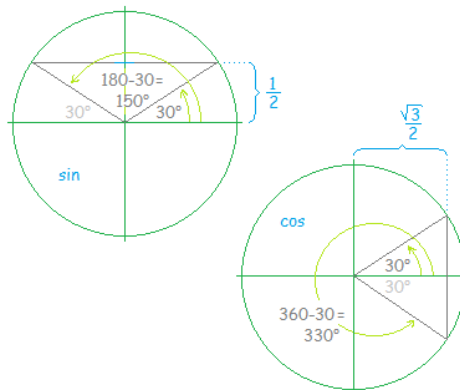
## Trigo

- ① Add meg  $x$  értékét!

a)  $\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x_1 = 30^\circ + 2k\pi$   
 $x_2 = 150^\circ + 2l\pi$

$$k, l \in \mathbb{Z}$$

b)  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x_1 = 30^\circ + 2k\pi$   
 $x_2 = 330^\circ + 2l\pi$



② Oldd meg az egyenleteket!

a)  $2 \cdot \cos^2 x = 4 - 5 \cdot \sin x$

$2 \cdot (1 - \sin^2 x) = 4 - 5 \cdot \sin x$   $(\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x)$

$\sin x := a \rightarrow 2 \cdot (1 - a^2) = 4 - 5 \cdot a$

$-2a^2 + 5a - 2 = 0 \rightarrow$  megoldóképlettel megoldani  $\rightarrow a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = 2$

a második megoldás nem jó, hisz a  $\sin$  és  $\cos$  csak a  $[-1; 1]$ -on van értelmezve

$a_1 = \frac{1}{2} = \sin x \rightarrow$  előző feladatban ezt a példát már megoldottuk

$x_1 = 30^\circ + 2k\pi$

$x_2 = 150^\circ + 2l\pi \quad k; l \in \mathbb{Z}$

b)  $\sin^2 \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4} \rightarrow \left(x - \frac{\pi}{6}\right) := a$

$\sin^2 a = \frac{1}{4} \rightarrow \sin a = \frac{1}{2} \rightarrow$  előző feladatban ezt a példát már megoldottuk

$\rightarrow a_1 = 30^\circ + 2k\pi \quad a_2 = 150^\circ + 2l\pi$

$a_1 = \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow 30 = \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = x - 30 \rightarrow x = 60^\circ$

$x_1 = 60^\circ + 2k\pi$

$a_2 = \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow 150 = \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = x - 30 \rightarrow x = 180^\circ$

$x_2 = 180^\circ + 2l\pi \quad k; l \in \mathbb{Z}$

③ Az  $\alpha$  szög kiszámítása nélkül add meg a kért szögfüggvényeket, ha tudjuk, hogy  $\sin \alpha = 0,6$ !

$\cos \alpha$        $\operatorname{tg} \alpha$        $\operatorname{ctg} \alpha$

Azonosságokat használjuk fel:

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x + 0,6^2 = 1 \rightarrow \cos^2 x = 1 - 0,6^2 = 0,64 \rightarrow \cos x = 0,8$

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4} = 0,75$

$\operatorname{ctg} x = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{0,75} = 1,3$

④ Egy derékszögű  $\Delta$ -ben az egyik hegyesszög  $50^\circ$ , a vele szemben lévő befogó  $6 \text{ cm}$ . Mekkora a kerülete?

Megkeressük a megfelelő szögfüggvényt

$\sin 50^\circ = \frac{\text{szemközti befogó}}{\text{átfogó}} = \frac{6}{\text{átfogó}} \rightarrow \text{átfogó} = 7,8 \text{ cm}$

Másik befogó Pitagoras-tétellel:  $7,8^2 - 6^2 = \text{befogó}^2$

másik befogó  $= \sqrt{24,84} = 5 \text{ cm}$

(Számolhattunk volna itt is szögfüggvénnyel:  $\cos 50^\circ = \frac{\text{szomszédos befogó}}{\text{átfogó}} = \frac{\text{szomszédos befogó}}{7,8}$ )

Adottak az oldalak  $\rightarrow K = 5 + 6 + 7,8 = 18,8 \text{ cm}$



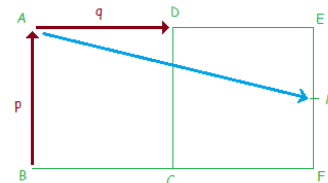
⑤ Adott két egybevágó négyzet, az egyik csúcsai  $ABCD$ , a másiké  $CDEF$  ( $CD$  él közös).  $EF$  oldal felezőpontja az  $M$  pont. Adott még  $\vec{p} = \overline{BA}$  és  $\vec{q} = \overline{AD}$  vektorok; ezek segítségével fejezd ki  $\overline{AM}$  vektort!

a  $\vec{q}$  vektor duplája a  $2\vec{q}$  vektor

a  $\vec{p}$  vektor fele a  $\frac{\vec{p}}{2}$  vektor

a  $\vec{p}$  vektor ellentettje pedig a  $-\vec{p}$  vektor

$\overline{AM} = 2\vec{q} - \frac{\vec{p}}{2}$



Korgeo

① Egy egyenes irányvektora  $\underline{i}(2; 3)$ .

a) Add meg az egyenes egyik normálvektorát!

Tudjuk, hogy az irányvektor és a normálvektor egymásra merőleges, így csak el kell forgatnunk a vektort  $90^\circ$ -al (koordináták felcserélése, majd az első ellentettje)  
 $\underline{i}(2; 3) \rightarrow \underline{n}(-3; 2)$

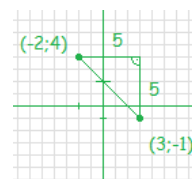
b) Az egyenes  $y$  tengelyt  $+2$ -ben metszi. Add meg az egyenletét!

Az irányvektor megadja az egyenes meredekségét, így csak fel kell írunk az egyenletét  
 $y = m \cdot x + b$  ( $m$ : meredekség;  $b$ :  $y$  tengely metszete)  
 $\underline{i}(2; 3)$  meredeksége:  $\frac{2}{3}$   
 $y = \frac{2}{3}x + 2$

② a) Add meg a  $A(-2; 4)$  és  $B(3; -1)$  pontokon átmenő egyenes egyenletét!

(A függvénytáblában szerepel képlet a két ponton átmenő egyenesre.)

Most leolvasható az ábráról a meredekség is és az  $y$  tengelymetszet is  
 $y = m \cdot x + b$   $m = -\frac{5}{5} = -1$   $b = 2 \Rightarrow y = -x + 2$



b) Add meg az egyenes zérushelyét!

Ez is leolvasható egyértelműen:  $x = 2$

Ha nem látszana, akkor az egyenes egyenletét egyenlővé téve 0-val és megoldva az egyenletet, a megoldás megadja a zérushelyet:  $-x + 2 = 0 \rightarrow x = 2$

c) Add meg  $AB$  szakasz hosszát!

(A függvénytáblában szerepel képlet két pont távolságára.)

Észrevehető az ábrán egy derékszögű  $\Delta$ , abból Pitagoras-tétellel számolható a távolság:  
 $5^2 + 5^2 = \overline{AB}^2 \rightarrow 50 = \overline{AB}^2 \rightarrow \overline{AB} = 7,1$

③ Adott 3 egyenes, melyek meghatároznak egy  $\Delta$ -et.

$$f(x): y = \frac{1}{2}x + 3 \quad g(x): y = -2x - 1 \quad h(x): y = 3x - 2$$

a) Add meg a  $\Delta$  csúcsainak koordinátáit!

Az ábráról csak az  $A(2; 4)$  olvasható le egyértelműen

A másik két csúcsnál az egyenesek metszéspontja segítségével számoljuk ki a koordinátákat, egyenletrendszerként kezeljük az egyenleteiket.

$B \rightarrow g$  és  $h$  metszéspontja

$$\text{I. } y = -2x - 1$$

$$\text{II. } y = 3x - 2$$

$$y = y \rightarrow -2x - 1 = 3x - 2 \rightarrow x = \frac{1}{5} \rightarrow y = 3x - 2 = 3 \cdot \frac{1}{5} - 2 = -\frac{7}{5}$$

$$B\left(\frac{1}{5}; -\frac{7}{5}\right)$$

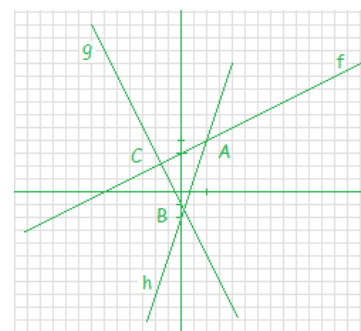
$C \rightarrow g$  és  $f$  metszéspontja

$$\text{I. } y = -2x - 1$$

$$\text{II. } y = \frac{1}{2}x + 3$$

$$y = y \rightarrow -2x - 1 = \frac{1}{2}x + 3 \rightarrow x = -\frac{8}{5} \rightarrow y = -2x - 1 = -2 \cdot \left(-\frac{8}{5}\right) - 1 = \frac{11}{5}$$

$$C\left(-\frac{8}{5}; \frac{11}{5}\right)$$



b) Add meg a  $\Delta$  legkisebb szögének nagyságát!

A legkisebb szög mindig a legkisebb oldallal szemközti szög  $\rightarrow$  kiszámoljuk az oldalakat, majd  $\cos$ -tétellel a legkisebbel szemközti szöget.

Az oldalakat vagy képlettel, vagy a ②c) példában látott módon Pitagoras-tételekkel számoljuk

A három oldal így: 4; 4; 5,7  $\rightarrow$   $\cos$ -tételt felírva a kisebbik oldalra megkapjuk a szöget  
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \rightarrow 4^2 = 4^2 + 5,7^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5,7 \cdot \cos \gamma \rightarrow \gamma = 44,56^\circ$

(A szögei így:  $44,56^\circ; 44,56^\circ; 90,88^\circ \rightarrow$  Az  $f(x)$  és  $g(x)$  egyenesek meredekségei egymás negatív reciprocai, így a két egyenes egymásra merőleges, azaz a háromszögünk valójában derékszögű.)

④ Egy kör átmérője az  $AB$  szakasz.  $A(-3; -1)$  és  $B(2; 5)$ .

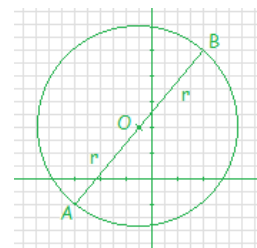
A kör középpontja az  $\overline{AB}$  szakasz felezőpontja ( $O$ )

Felezőpont számítása: a koordináták számtani közepe.

$$O\left(\frac{-3+2}{2}; \frac{-1+5}{2}\right) = O\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$$

A kör sugara az  $\overline{AB}$  távolság fele (mint korábban is számoltunk ilyet)

$$\overline{AB} = 7,8 \rightarrow r = 3,9$$



a) Add meg a kör egyenletét!

$$\text{Képlet szerint: } (x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2 \rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = 3,9^2$$

b) Hol metszi a kört az  $y = -\frac{1}{2}x + 1$  egyenes?

Metszéspontszámítás: az egyenleteiket egyenletrendszerként kezeljük és kiszámítjuk

$$\text{I. } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = 3,9^2$$

$$\text{II. } y = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$\text{I. } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x + 1 - 2\right)^2 = 3,9^2$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} + \left(-1 - \frac{1}{2}x\right)^2 = 15,21 \rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} + 1 + x + \frac{1}{4}x^2 = 15,21$$

$$\frac{5}{4}x^2 + 2x + \frac{5}{4} = 15,21 \rightarrow \frac{5}{4}x^2 + 2x - 13,96 = 0$$

$$\dots \quad x_1 = 2,5 \quad x_2 = -4,1$$

$$y_1 = -\frac{1}{2}x_1 + 1 = -0,25$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}x_2 + 1 = 3,05$$

$$M_1(2,5; -0,25)$$

$$M_2(-4,1; 3,05)$$

c) Rajta van a körön a  $P(3; 0)$  pont?

Egy pont rajta van a körön, ha a  $P(x_0; y_0)$  pont  $x_0$  és  $y_0$  koordinátáit beírva  $x$  és  $y$  helyére, az egyenlet azonosságot ad (azaz nincs ellentmondás).

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = 3,9^2 \text{ egyenletbe írva a } P(3; 0) \text{ pont } \rightarrow$$

$$\left(3 + \frac{1}{2}\right)^2 + (0 - 2)^2 = 3,9^2 \rightarrow 16,25 \neq 15,21 \rightarrow \text{éppen, de nincs rajta}$$

Amennyiben hibát találtál, kérlek írd az [info@matematikam.hu](mailto:info@matematikam.hu) e-mail címre, köszönöm!

Sok sikert az érettséghez!